ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 1: Logica Matematica

1.4 Sistemi deduttivi della logica proposizionale

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

19 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

Alcuni risultati fondamentali sui linguaggi formali

Primo teorema di incompletezza di Gödel, 1931

In ogni teoria matematica $\mathcal{T}$ contenente l'aritmetica, se $\mathcal{T}$ è coerente, allora $\mathcal{T}$ è **sintatticamente incompleta** (ovvero, **esistono enunciati indecidibili**).

Secondo teorema di incompletezza di Gödel, 1931

In ogni teoria matematica $\mathcal{T}$ contenente l'aritmetica, se $\mathcal{T}$ è coerente, allora **non è possibile provare la coerenza** di $\mathcal{T}$ all'interno di $\mathcal{T}$.

Teorema di indefinibilità di Tarski, 1936

Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio formale dell'aritmetica ed N la sua struttura standard. La coppia $(\mathcal{L}, N)$ è detta *linguaggio formale interpretato dell'aritmetica*. Allora non esiste alcuna formula dell'aritmetica $Vero(p)$ tale che per ogni formula dell'aritmetica p, si abbia $Vero(p)$ sse p è vero.

Il nocciolo del problema

- Parlare di se stessi: enunciati **auto-referenziali**
  - Il paradosso del mentitore: "Questo enunciato è falso"
  - Gödel formalizza aritmeticamente proprio questo enunciato (indecidibilità)

Il nocciolo del problema

- Parlare di se stessi: enunciati **auto-referenziali**
  - Il paradosso del mentitore: "Questo enunciato è falso"
  - Gödel formalizza aritmeticamente proprio questo enunciato (indecidibilità)
- Distinzione tra **linguaggio oggetto** e **metalinguaggio**
  - Linguaggio *di* cui si parla
  - Linguaggio *in* cui si parla

Il nocciolo del problema

- Parlare di se stessi: enunciati **auto-referenziali**
    - Il paradosso del mentitore: "Questo enunciato è falso"
    - Gödel formalizza aritmeticamente proprio questo enunciato (indecidibilità)
- Distinzione tra **linguaggio oggetto** e **metalinguaggio**
    - Linguaggio *di* cui si parla
    - Linguaggio *in* cui si parla
- I **linguaggi formali** (sufficientemente potenti) non possono rappresentare concetti **semantici**, come quello di **verità**.

Il nocciolo del problema

- Parlare di se stessi: enunciati **auto-referenziali**
  - Il paradosso del mentitore: “Questo enunciato è falso”
  - Gödel formalizza aritmeticamente proprio questo enunciato (indecidibilità)
- Distinzione tra **linguaggio oggetto** e **metalinguaggio**
  - Linguaggio *di* cui si parla
  - Linguaggio *in* cui si parla
- I **linguaggi formali** (sufficientemente potenti) non possono rappresentare concetti **semantici**, come quello di **verità**.
- Irriducibilità della **semantica** (senso e significato) alla **sintassi** (struttura linguistica)

Decidibilità della logica proposizionale

Problemi di decidibilità della logica proposizionale

Decidibilità della logica proposizionale

Problemi di decidibilità della logica proposizionale

- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è una tautologia oppure no (problema noto come **VALID**).

Decidibilità della logica proposizionale

Problemi di decidibilità della logica proposizionale

- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è una tautologia oppure no (problema noto come **VALID**).
- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è soddisfacibile oppure no (problema noto come **SAT**).

Decidibilità della logica proposizionale

Problemi di decidibilità della logica proposizionale

- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è una tautologia oppure no (problema noto come **VALID**).
- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è soddisfacibile oppure no (problema noto come **SAT**).

- La logica proposizionale è **decidibile**.
- Entrambi i problemi possono essere risolti attraverso una procedura algoritmica.
  - Ad esempio, costruendo la tabella di verità di α.
  - Ma se i simboli atomici sono n, avremo 2^n righe!

Decidibilità della logica proposizionale

Problemi di decidibilità della logica proposizionale

- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è una tautologia oppure no (problema noto come **VALID**).
- Data una proposizione α della logica proposizionale, stabilire se è soddisfacibile oppure no (problema noto come **SAT**).

- La logica proposizionale è **decidibile**.
- Entrambi i problemi possono essere risolti attraverso una procedura algoritmica.
  - Ad esempio, costruendo la tabella di verità di α.
  - Ma se i simboli atomici sono n, avremo 2^n righe!
- Più precisamente (per chi vuole approfondire):
  SAT è **NP-completo** e VALID è **coNP-completo**

Tableaux proposizionali

- I **tableaux proposizionali** sono un sistema di deduzione proposizionale basato sulla costruzione di un *albero di deduzione*.
- Ci permettono di verificare se una proposizione è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria.

Tableaux proposizionali

- I **tableaux proposizionali** sono un sistema di deduzione proposizionale basato sulla costruzione di un *albero di deduzione*.
- Ci permettono di verificare se una proposizione è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria.
- Tecnica più efficiente rispetto alla costruzione di una Tabella di verità.

Tableaux proposizionali

- I **tableaux proposizionali** sono un sistema di deduzione proposizionale basato sulla costruzione di un *albero di deduzione*.
- Ci permettono di verificare se una proposizione è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria.
- Tecnica più efficiente rispetto alla costruzione di una Tabella di verità.
- Introdotti da Evert W. **Beth** e da Jaakko **Hintikka** attorno al **1955**.
- Rielaborati per la logica classica da Raymond **Smullyan** (1968).

Tableaux proposizionali

- I **tableaux proposizionali** sono un sistema di deduzione proposizionale basato sulla costruzione di un *albero di deduzione*.
- Ci permettono di verificare se una proposizione è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria.
- Tecnica più efficiente rispetto alla costruzione di una Tabella di verità.
- Introdotti da Evert W. **Beth** e da Jaakko **Hintikka** attorno al **1955**.
- Rielaborati per la logica classica da Raymond **Smullyan** (1968).

Definizione: Tableau

Data una proposizione γ. Un *tableau* per γ è un **albero binario**:

- I **nodi** sono etichettati da **sottoformule** di γ.
- Il nodo radice in alto è etichettato con la proposizione di partenza γ.
- La costruzione procede aggiungendo nodi in accordo a determinate **regole di espansione**.
- In tal modo, si va alla ricerca di un modello: se lo trovo α è soddisfacibile, altrimenti non lo è.

Tableaux proposizionali

- Le regole di espansione si basano su uno **schema di scomposizione** delle proposizioni che le suddivide in due categorie:
  - α Formula proposizionale **congiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di entrambe le sue componenti.
  - β Formula proposizionale **disgiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di almeno una tra le due componenti.

Tableaux proposizionali

- Le regole di espansione si basano su uno **schema di scomposizione** delle proposizioni che le suddivide in due categorie:
  - α Formula proposizionale **congiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di entrambe le sue componenti.
  - β Formula proposizionale **disgiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di almeno una tra le due componenti.
- Ogni α-**formula** e ogni β-**formula** ha due componenti.

α-formula	I componente	II componente
$\alpha_1 \wedge \alpha_2$	α_1	α_2
$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$	$\neg\alpha_1$	$\neg\alpha_2$
$\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \equiv \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$	α_1	$\neg\alpha_2$

β-formula	I componente	II componente
$\beta_1 \vee \beta_2$	β_1	β_2
$\neg(\beta_1 \wedge \beta_2) \equiv \neg\beta_1 \vee \neg\beta_2$	$\neg\beta_1$	$\neg\beta_2$
$\beta_1 \rightarrow \beta_2 \equiv \neg\beta_1 \vee \beta_2$	$\neg\beta_1$	β_2

Tableaux proposizionali

- Le regole di espansione si basano su uno **schema di scomposizione** delle proposizioni che le suddivide in due categorie:
  - α Formula proposizionale **congiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di entrambe le sue componenti.
  - β Formula proposizionale **disgiuntiva**, la cui soddisfacibilità equivale alla soddisfacibilità di almeno una tra le due componenti.
- Ogni α-**formula** e ogni β-**formula** ha due componenti.

α-formula	I componente	II componente
$\alpha_1 \wedge \alpha_2$	α_1	α_2
$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$	$\neg\alpha_1$	$\neg\alpha_2$
$\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \equiv \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$	α_1	$\neg\alpha_2$

β-formula	I componente	II componente
$\beta_1 \vee \beta_2$	β_1	β_2
$\neg(\beta_1 \wedge \beta_2) \equiv \neg\beta_1 \vee \neg\beta_2$	$\neg\beta_1$	$\neg\beta_2$
$\beta_1 \rightarrow \beta_2 \equiv \neg\beta_1 \vee \beta_2$	$\neg\beta_1$	β_2

- Nota: $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Tableaux proposizionali

Regole di espansione dei tableaux

α-regola	$\dfrac{\alpha_1 \wedge \alpha_2}{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}}$	$\dfrac{\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)}{\begin{matrix}\neg\alpha_1\\ \neg\alpha_2\end{matrix}}$	$\dfrac{\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)}{\begin{matrix}\alpha_1\\ \neg\alpha_2\end{matrix}}$
β-regola	$\dfrac{\beta_1 \vee \beta_2}{\beta_1 \quad \beta_2}$	$\dfrac{\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)}{\neg\beta_1 \quad \neg\beta_2}$	$\dfrac{\beta_1 \rightarrow \beta_2}{\neg\beta_1 \quad \beta_2}$

$\neg$-regola	$\dfrac{\neg\neg\gamma}{\gamma}$

Tableaux proposizionali

Esempio 1

Costruzione di un tableau per la proposizione $\neg\neg((A \rightarrow (B \wedge C)) \vee (B \rightarrow D))$:

Tableaux proposizionali

Esempio 1

Costruzione di un tableau per la proposizione $\neg\neg((A \rightarrow (B \wedge C)) \vee (B \rightarrow D))$:

- $\neg\neg((A \rightarrow (B \wedge C)) \vee (B \rightarrow D))$
  - $(A \rightarrow (B \wedge C)) \vee (B \rightarrow D)$
    - $A \rightarrow (B \wedge C)$
      - $\neg A$
      - $B \wedge C$
        - B
          - C
    - $B \rightarrow D$
      - $\neg B$
      - D

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau soddisfacibile

Un ramo di un tableau è *soddisfacibile* se la congiunzione delle formule che etichettano i suoi nodi è soddisfacibile. Un *tableau è soddisfacibile* se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile. Altrimenti è detto *insoddisfacibile*.

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau soddisfacibile

Un ramo di un tableau è *soddisfacibile* se la congiunzione delle formule che etichettano i suoi nodi è soddisfacibile. Un *tableau è soddisfacibile* se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile. Altrimenti è detto *insoddisfacibile*.

Definizione: Tableau chiuso

Un ramo di un tableau è *chiuso* se, per qualche proposizione α, entrambe α e $\neg\alpha$ etichettano nodi che occorrono sul ramo, oppure $\neg\top$ o $\perp$ occorrono sul ramo. Altrimenti il ramo è detto *aperto*.
Un *tableau è chiuso* se tutti i suoi rami sono chiusi, altrimenti è *aperto*.

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau soddisfacibile

Un ramo di un tableau è *soddisfacibile* se la congiunzione delle formule che etichettano i suoi nodi è soddisfacibile. Un *tableau è soddisfacibile* se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile. Altrimenti è detto *insoddisfacibile*.

Definizione: Tableau chiuso

Un ramo di un tableau è *chiuso* se, per qualche proposizione α, entrambe α e $\neg\alpha$ etichettano nodi che occorrono sul ramo, oppure $\neg\top$ o $\bot$ occorrono sul ramo. Altrimenti il ramo è detto *aperto*.
Un *tableau è chiuso* se tutti i suoi rami sono chiusi, altrimenti è *aperto*.

- Se otteniamo un tableau chiuso per α, allora α è insoddisfacibile.

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau soddisfacibile

Un ramo di un tableau è *soddisfacibile* se la congiunzione delle formule che etichettano i suoi nodi è soddisfacibile. Un *tableau è soddisfacibile* se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile. Altrimenti è detto *insoddisfacibile*.

Definizione: Tableau chiuso

Un ramo di un tableau è *chiuso* se, per qualche proposizione α, entrambe α e $\neg\alpha$ etichettano nodi che occorrono sul ramo, oppure $\neg\top$ o $\bot$ occorrono sul ramo. Altrimenti il ramo è detto *aperto*.
Un *tableau è chiuso* se tutti i suoi rami sono chiusi, altrimenti è *aperto*.

- Se otteniamo un tableau chiuso per α, allora α è insoddisfacibile.
- L'ordine di espansione delle formule è irrilevante.

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau-dimostrazione

Una *tableau-dimostrazione* di una formula α è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\neg\alpha$. In tal caso diciamo che α è un *teorema del sistema di calcolo dei tableaux* e scriviamo

$$\vdash_T \alpha.$$

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau-dimostrazione

Una *tableau-dimostrazione* di una formula α è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\neg\alpha$. In tal caso diciamo che α è un *teorema del sistema di calcolo dei tableaux* e scriviamo

$$\vdash_T \alpha.$$

Come utilizzare i tableux come metodo di dimostrazione:

Per provare che α è	Costruire un tableau per	Chiuso?
Teorema	$\neg\alpha$	SI
Soddisfacibile	α	NO
Insoddisfacibile	α	SI

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau-dimostrazione

Una *tableau-dimostrazione* di una formula α è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\neg\alpha$. In tal caso diciamo che α è un *teorema del sistema di calcolo dei tableaux* e scriviamo

$$\vdash_T \alpha.$$

Come utilizzare i tableux come metodo di dimostrazione:

Per provare che α è	Costruire un tableau per	Chiuso?
Teorema	$\neg\alpha$	SI
Soddisfacibile	α	NO
Insoddisfacibile	α	SI

Teorema (correttezza e completezza)

α è una tautologia se e solo se α ha una tableau-dimostrazione, ovvero:

$$\vdash_T \alpha \text{ sse } \models \alpha.$$

Tableaux proposizionali

Definizione: Tableau-dimostrazione

Una *tableau-dimostrazione* di una formula α è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\neg\alpha$. In tal caso diciamo che α è un *teorema del sistema di calcolo dei tableaux* e scriviamo

$$\vdash_T \alpha.$$

Come utilizzare i tableux come metodo di dimostrazione:

Per provare che α è	Costruire un tableau per	Chiuso?
Teorema	$\neg\alpha$	SI
Soddisfacibile	α	NO
Insoddisfacibile	α	SI

Teorema (correttezza e completezza)

α è una tautologia se e solo se α ha una tableau-dimostrazione, ovvero:

$$\vdash_T \alpha \text{ sse } \models \alpha.$$

Ogni ramo aperto rappresenta un insieme di modelli per α.

Tableaux proposizionali

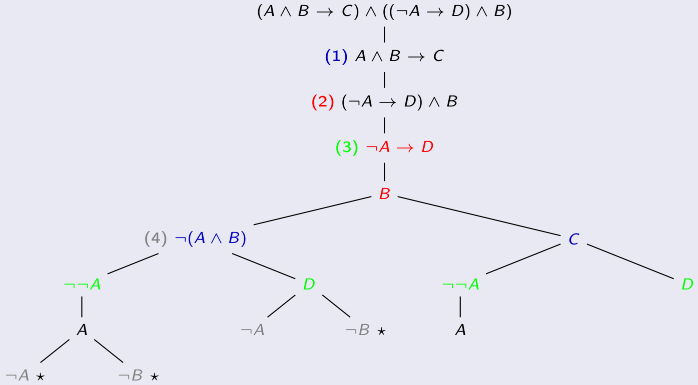
Esempio 2

Costruzione di un tableau per la proposizione $(A \wedge B \to C) \wedge (\neg A \to D) \wedge B$:

Tableaux proposizionali

Esempio 2

Costruzione di un tableau per la proposizione $(A \wedge B \to C) \wedge (\neg A \to D) \wedge B$:



Il simbolo $\star$ indica i rami chiusi.

Tableaux proposizionali

Esempio 3

Costruzione di un tableau per $\neg((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \to (B \to (D \wedge A))))$:

Tableaux proposizionali

Esempio 3

Costruzione di un tableau per $\neg((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \to (B \to (D \wedge A))))$:

- $\neg((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \to (B \to (D \wedge A))))$
  - $\neg(A \to (B \wedge C))$
    - A
      - $\neg(B \wedge C)$
        - $\neg B$
        - $\neg C$
  - $\neg(A \to (B \to (D \wedge A)))$
    - A
      - $\neg(B \to (D \wedge A))$
        - B
          - $\neg(D \wedge A)$
            - $\neg D$
            - $\neg A \star$

Tableaux proposizionali

Metodo per valutare una proposizione attraverso l'uso dei tableux

Se abbiamo una proposizione α e vogliamo verificare se è soddisfacibile, se è una tautologia o se è una contraddizione attraverso il metodo dei tableaux, possiamo procedere così:

Costruiamo il tableau per α

C'è almeno un ramo aperto?

no: α è una contraddizione

Costruiamo il tableau per $\neg\alpha$

C'è almeno un ramo aperto?

si: α è soddisfacibile

no: α è una tautologia

Esercizi

Determinare mediante tableaux se le seguenti formule sono soddisfacibili, tautologiche o contraddittorie. Nel caso in cui sono soddisfacibili, individuare un modello.

1. $\neg(A \wedge B \rightarrow A)$
2. $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
3. $\neg(A \rightarrow B) \wedge (\neg C \vee \neg A)$
4. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
5. $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg C) \wedge (A \rightarrow (\neg B \wedge C))$
6. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (A \rightarrow C))$
7. $A \vee E \rightarrow \neg B \vee C \vee A \vee D$
8. $(A \leftrightarrow B \vee C) \wedge (D \rightarrow \neg C) \wedge D \wedge A \rightarrow (B \leftrightarrow A)$